فرادرس
فراتر از یک کلاس درس
www.faradars.org

مقایسه میانگین در آزمون های پارامتری درSPSS

مدرس:

آرمان ری‌بد

دانشجوی دکترای آمار

مقایسه میانگین یک ویژگی بین دو یا چند گروه

- تشخیص تفاوت دو جامعه
- مقایسه میانگین به عنوان شاخص تمرکز جمعیت
- مقایسه میانگین از روی نمونه
- مقایسه میانگین جامعه از طریق استنباط از نمونه (آزمون فرض)

آزمون فرض

- فرض آماری، حدسی در مورد پارامتر یا پارامترها جامعه یا حتی توزیع و شکل جامعه است.
- آزمون فرض آماری، انجام استنباط در مورد فرض‌های آماری
- آزمون فرض آماری: دو فرضیه با دو توصیف مختلفی از خصوصیت جامعه
- عدم وجود اشتراک بین دو فرضیه
  - فرض صفر Null Hypothesis H_0

  حدس اولیه برای پارامتر جامعه (هدف محقق از انجام تحقیق، رد کردن این فرض است.)
  - فرض مقابل Alternative Hypothesis H_1

حدس محقق برای پارامتر جامعه (هدف محقق از انجام تحقیق، نشان دادن تغییر در پارامتر جامعه به کمک فرض مقابل است)

آزمون فرض

- نمونه‌ای از آزمون‌های فرض:
  - آیا متوسط قد دانشجویان برابر ۱۶۷ سانتی‌متر است؟ در مقابل آن‌که میانگین قد برابر با ۱۶۷ سانتی‌متر نیست!
  - آیا انحراف از معیار قد دانشجویان برابر ۳۰سانتی‌متر است؟ در مقابل آن که انحراف معیار قد دانشجویان برابر با ۳۰ سانتی‌متر نیست!
  - ایا متوسط قد دانشجویان دختر و پسر با یکدیگر برابر است؟ در مقابل آن که متوسط قد دانشجویان دختر و پسر با یکدیگر تفاوت معنی‌داری دارد؟

آزمون فرض

- به مثال زیر توجه کنید:
  - مسئول بخش کنترل کیفیت یک کارخانه تولید لوله‌های آب، باید مطئمن شود که قطر هر لوله برابر ۵ سانتی‌متر است. او یک نمونه از از لوله‌ها انتخاب کرده و قطر آن‌ها را اندازه گیری کرده است. برای آزمون برابر بودن قطر لوله‌های تولید شده از یک آزمون آماری براساس نمونه انتخابی فرضیه‌های زیر را می‌سازد.
  - فرض صفر - **Null Hypothesis: H_0**
  - فرض اولیه بر این اساس ایجاد می‌شود که مقدار میانگین قطر لوله‌ها برابر مقدار استاندارد اعلام شده یعنی همان ۵ سانتی‌متر است.

- $H_0: \mu = 5$

آزمون فرض

- فرض مقابل **Alternative Hypothesis: H_1 or H_A**
- بیانگر اختلاف بین مقدار پارامتر جمعیت و مقدار اولیه (حدس اولیه) است.
- این فرض‌ها می‌تواند یکی از شکل‌های زیر باشد.

تصور	فرض مقابل
میانگین جمعیت کمتر از مقدار حدسی است.	$\mu < 5$
میانگین جمعیت بیشتر از مقدار حدسی است.	$\mu > 5$
میانگین جمعیت مخالف مقدار حدسی است (جهت مهم نیست)	$\mu \neq 5$

آزمون فرض

- پس می توان فرض آماری مربوط به این مسئله را به صورت های زیر نوشت:

- $H_0: \mu = 5$
- $H_1: \mu \neq 5$

آزمون دو دامنه

- $H_0: \mu = 5$
- $H_1: \mu < 5$

آزمون یک دامنه

- $H_0: \mu = 5$
- $H_1: \mu > 5$

آزمون یک دامنه

آزمون فرض

- پس می توان فرض آماری مربوط به این مسئله را به صورت های زیر نوشت:

- $H_0: \mu = 5$
- $H_1: \mu \neq 5$

- $H_0: \mu = 5$
- $H_1: \mu < 5$

- $H_0: \mu = 5$
- $H_1: \mu > 5$

آزمون فرض

- انواع فرض‌ها:
  - ساده: توزیع جامعه آماری توسط فرض کاملا مشخص باشد.
  - مرکب: توزیع جامعه آماری توسط فرض مشخص نباشد.

- فرض ساده: $\mu = 5$
- فرض مرکب: $\mu \neq 5$
- فرض مرکب: $\mu < 5$
- فرض مرکب: $\mu > 5$

آزمون فرض

- انواع آزمون‌ها:
  - آزمون یک دامنه: فرض مقابل به صورت یک طرفه (< یا >) باشد.
  - آزمون دو دامنه: فرض مقابل به صورت دو طرفه ($\neq$) باشد.

آزمون دو دامنه

- $H_0: \mu = 5$
- $H_1: \mu \neq 5$

آزمون یک دامنه

- $H_0: \mu = 5$
- $H_1: \mu < 5$

آزمون یک دامنه

- $H_0: \mu = 5$
- $H_1: \mu > 5$

انواع خطا

- خطای نوع اول

  - رد فرض H_0 در صورتی که H_0 درست است.
  - احتمال رخداد خطای نوع اول **(سطح معنی‌داری)** = α

- خطای نوع دوم

  - رد فرض H_1 در صورتی که H_1 درست است. (قبول فرض H_0 در صورتی که H_1 درست است.)
  - احتمال رخداد خطای نوع دوم = β

ناحیه بحرانی

- ملاکی برای رد یا عدم رد فرض صفر.
- انتخاب ملاک مناسب برای حداقل کردن خطای نوع اول و دوم
- براساس مقدار خطای نوع اول، ناحیه بحرانی تعیین می‌شود.
- نتایج آزمون‌های آماری بوسیله نرم‌افزارهای رایانه‌ای، دارای ناحیه بحرانی است که در سطح ثابت میزان خطای نوع اول، کمترین میزان خطای نوع دوم را دارد. (آزمون‌هایی با بیشترین توان)

مراحل انجام آزمون فرض

- تعیین فرض صفر و فرض مقابل (نوع آزمون یک طرفه یا دو طرفه)
- تعیین میزان خطای نوع اول (سطح معنی‌داری) میزان خطای نوع اول ثابت - یکی از مقادیر ۰/۰۱ یا ۰/۰۵
- انتخاب آماره آزمون (براساس برآوردگر نقطه‌ای پارامتر و وابسته به نمونه گرفته شده)
- تعیین ناحیه بحرانی (با توجه به نوع آزمون – فرض مقابل، میزان خطای نوع اول وآماره آزمون و توزیع آن)
- محاسبه مقدار آماره آزمون براساس نمونه گرفته شده.
- مقایسه مقدار آماره آزمون با ناحیه بحرانی (درصورت قرارگیری مقدار آماره آزمون در ناحیه بحرانی فرض صفر رد می‌شود در غیراینصورت دلیلی برای رد فرض صفر وجود ندارد- فرض صفر در مقابل فرض مقابل تایید می‌شود.)

مراحل انجام آزمون فرض

مثال: طول درمان یک بیماری به روش معمول دارای میانگین ۱۵ و انحراف معیار ۳ روز است. داروی جدیدی به بازار آمده است که طول دوره درمان را کاهش می‌دهد. (با فرض ثابت بودن انحراف معیار) این داروی جدید روی ۷۰ بیمار آزمایش شده‌است و میانگین مدت درمان برابر با ۱۴ روز شده‌است. آیا داروی معرفی شده، در کاهش طول درمان در سطح معنی‌داری ۰/۰۲۵ موثر است؟

مراحل انجام آزمون فرض

- گام اول-تعیین فرض صفر و فرض مقابل

$H_0: \mu = 15$

$H_1: \mu < 15$

- گام دوم – تعیین سطح معنی‌دار (میزان خطای نوع اول) $\alpha = 0.025$
- گام سوم- انتخاب ناحیه بحرانی
- گام چهارم- مقدار آماره آزمون و مقایسه با ناحیه بحرانی

(مقدار $-z_{1-0.025}$ از روی جدول توزیع نرمال)

$$Z = \frac{\overline{X} - 15}{3/\sqrt{70}} < -z_{1-a}$$

- گام پنجم نتیجه گیری – قرارگیری آماره آزمون در ناحیه بحرانی = رد فرض صفر

آشنایی با مقدار احتمال

p-value - Probability value (Significant)

تعریف مقدار احتمال- P-VALUE

- کمترین مقداری از احتمال خطای نوع اول (یعنی میزان یا سطح آزمون) است که یافته‌ی آماره‌ی آزمون ممکن است موجب رد فرض صفر گردد.

مزایای P-VALUE

- عدم استفاده از جداول توزیع آماره آزمون
- تصمیم‌گیری در مورد رد فرض صفر براساس مقایسه P-Values با میزان سطح با معنایی- α

روش محاسبه P-Value

نوع آزمون	آزمون فرض	مقدار احتمال-P-Value
آزمون یک طرفه راست	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$P_\mu(U \geq u)$
آزمون یک طرفه چپ	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$P_\mu(U \leq u)$
آزمون دو طرفه	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	$2\min(P_\mu(U \leq u), P_\mu(U \geq u))$

- آماره آزمون U و مقدار آماره آزمون u براساس نمونه
- پارامتر جامعه μ (مجهول) و μ_0 پارامتر جامعه براساس فرض صفر
- نماد $P_\mu(U \geq u)$ احتمال روی دادن پیشامد $U \geq u$ براساس درست بودن فرض صفر است.

ملاکهای تصمیم P-Value

- برای گرفتن یک تصمیم مناسب براساس P-Value از ملاکهای زیر استفاده می‌شود:

تعبیر	مقدار p
معنی دار از نظر آماری (رد فرض صفر در سطح یا میزان α)	کمتر از سطح با معنایی= α
دلیلی علیه فرض صفر وجود ندارد.	بزرگتر از سطح با معنایی= α

مثال استفاده از P-Value

مثال: شرکت هواپیمایی ادعا می‌کند که میانگین عمر هواپیماهای شرکت برابر با ۱۰ سال است، ولی شرکت بیمه معتقد است که این میزان بیشتر از ۱۰ سال است. مسئول بیمه برای صحت این گفته، یک نمونه ۴۰تایی از این هواپیماها را به تصادف انتخاب کرده و میانگین را 13.42 و انحراف معیار را 8.28 سال بدست می‌آورد. آیا ادعای شرکت هواپیمایی صحیح است؟

مزایای استفاده از P-Value

(با سطح معنی‌داری 0.05 آزمون را انجام دهید.) فرض صفر ادعای شرکت هواپیمایی و فرض مقابل ادعای شرکت بیمه)

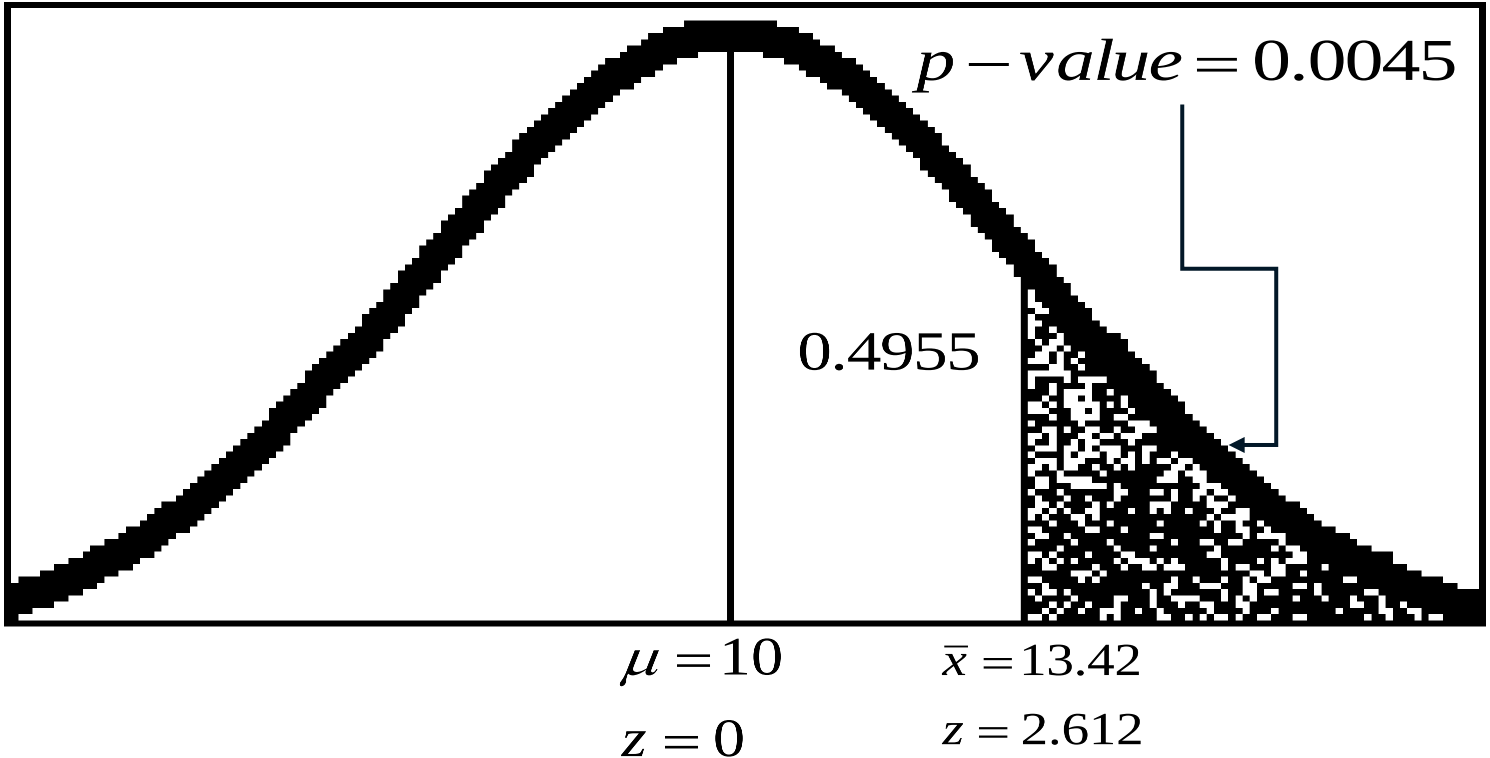
$$\begin{cases} H_0 : \mu = 10 \\ H_1 : \mu > 10 \end{cases} \qquad U = \frac{\overline{X} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{13.42 - 10}{\frac{8.28}{\sqrt{40}}} = 2.612 = u$$

$$p-value = p_{H_0}(U(x) \geq u) = p_{\mu=10}(U(x) \geq 2.612) = 0.0045$$

$$\alpha = 0.05 > p-Value = 0.0045 : reject \ \ H_0$$

مزایای استفاده از P-Value

نمودار منحنی نرمال و محاسبه مقدار احتمال



اشتباه در تفسیر مقدار احتمال با خطای نوع اول

- مقدار خطای نوع اول به توزیع آماره آزمون با توجه به تایید فرض صفر و ناحیه بحرانی بدست می‌آید. (وابسته به نمونه نیست و مقداری ثابت است.)

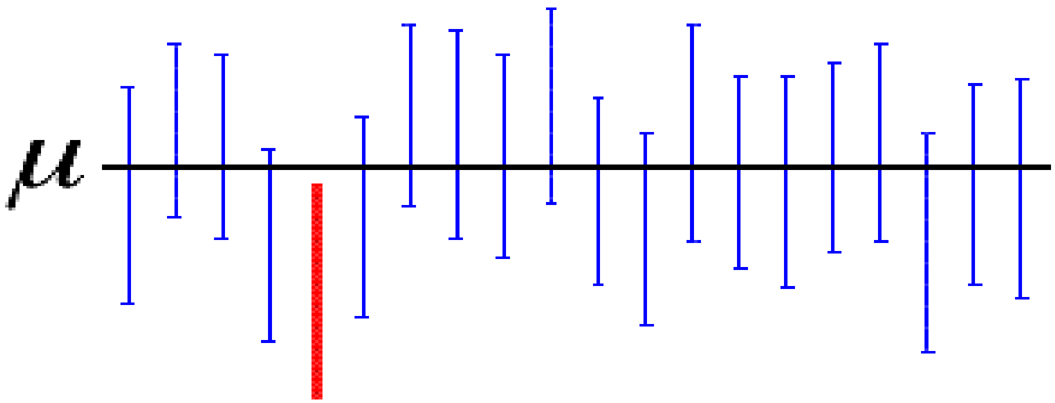
- مقدار احتمال- P Value از روی مشاهدات بدست می‌آید (تابعی از مشاهدات است و از نمونه‌ای به نمونه‌ی دیگر متفاوت خواهد بود.)

فاصله اطمینان– Confident Interval

- فاصله اطمینان یک بازه (فاصله) از اعداد است که به نظر می‌رسد پارامتر جامعه (هر چند نامعلوم) را پوشش می‌دهد. از آنجایی که این فواصل تصادفی هستند (از روی مقادیر نمونه تصادفی بدست می‌آیند) از هر نمونه، یک فاصله اطمینان بدست آید.
- اگر نمونه‌های متعددی از جمعیت گرفته شود، درصدی مشخصی از این فواصل شامل پارامتر نامعلوم جامعه خواهند بود.
- درصدی از این فواصل که شامل پارامتر جمعیت هستند به عنوان سطح اطمینان فاصله در نظر گرفته می‌شود.

فاصله اطمینان

- برای پارامتر میانگین جامعه – μ یک فاصله اطمینان تشکیل شده‌است.
- ۲۰ بار نمونه‌گیری انجام شده‌است. براساس هر نمونه یک فاصله اطمینان ۹۰٪ تهیه شده است.
- فقط یکی فاصله‌های اطمینان شامل میانگین جامعه نیست.



- خط مشکی نشان دهنده مقدار واقعی پارامتر جامعه (میانگین) و خطوط آبی نشان دهنده فاصله اطمینان است. خط قرمز نشان دهنده یکی از فواصل اطمینان است که میانگین جمعیت را شامل نمی‌شود. (از ۲۰ تا ۱۹ فاصله شامل میانگین و یکی خارج از میانگین قرار دارد.)

فاصله اطمینان

- اگر فاصله اطمینان شامل صفر باشد می توان آن را مترادف با آزمون آماری در نظر گرفت که در آن فرض صفر بودن میانگین رد نخواهد شد.
- اگر فاصله اطمینان شامل صفر نباشد می توان آن را مترادف با آزمون آماری در نظر گرفت که در آن فرض صفر بودن میانگین رد می شود.

فرضیات اولیه آزمون‌ها

- در این آزمون فرض بر نرمال بودن داده‌ها است.
- متغیر معرفی شده باید مقادیر عددی داشته باشد.
- اگر داده‌ها مقداری کمی چولگی هم داشته باشند، این ازمون‌ها در برابر اشتباه مقاومت خواهد کرد.
- واریانس جامعه، نامعلوم ولی قابل برآورد است.

آزمون های برمبنای آماره T

- در آزمون های پارامتری مجبور به اعمال شرطهایی هستیم که از جمله می توان توزیع نرمال برای داده ها را در نظر گرفت. این شرط اگر چه باعث انجام کارهای آماری دیگر برای تعیین توزیع داده ها دارد ولی در عوض باعث افزایش کارایی (توان آزمون) پارامتری می گردد.

مقایسه میانگین یک متغیر با مقدار ثابت

- آزمون به شکل زیر در نظر گرفته شده است. (μمقدارمیانگین جمعیت است و μ_0 مقدار حدسی است که از جمعیت برای میانگین می‌زنیم.)
  - $H_0: \mu=\mu_0$
  - $H_1 : \mu \neq \mu_0$
- شکل دیگری از آزمون که در Spss به کار می رود به صورت
  - $H_0: \mu-\mu_0=0$
  - $H_1 : \mu-\mu_0 \neq 0$

آماره آزمون

$$T = \frac{(\overline{X} - \mu_0)}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

- که در آن صورت، تفاضل میانگین نمونه از میانگین حدسی توسط فرض صفر
- مخرج نسبت انحراف استاندارد نمونه بر حذر تعداد نمونه است.

- ناحیه بحرانی نیز به صورت

$$\overline{X} > \mu_0 + t_{1-\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$$

فاصله اطمینان مربوط به آزمون دوطرفه

- فاصله اطمینان برای این آزمون به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(\overline{X}-\mu_0)\pm t_{1-\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$$

- که مقدار t با درجه آزادی (n-1) و احتمال 1-α محاسبه می شود.

مقایسه میانگین یک متغیر بین دو گروه مستقل

- در این آزمون معمولا فرضیات به صورت زیر هستند:

- $H_0: \mu_1=\mu_2$ یا $\mu_1-\mu_2=0$
- $H_1: \mu_1\neq\mu_2$ ازمون دو طرفه یا $\mu_1-\mu_2 \neq 0$
- $H_1: \mu_1<\mu_2$ آزمون یکطرفه چپ یا $\mu_1-\mu_2<0$
- $H_1: \mu_1>\mu_2$ آزمون یکطرفه راست یا $\mu_1-\mu_2>0$

- در این آزمون فرض نرمال بودن جمعیت باید در نظر گرفته شود.

آماره آزمون با فرض برابری واریانس ها

- اگر فرض برابری واریانس دو گروه تایید شود

$$T = {(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)} \Big/ {S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

- مقدار واریانس آمیخته S_p

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

آماره آزمون

- فاصله اطمینان مرتبط با آزمون دو طرفه

$$\overline{X_1} - \overline{X_2} \pm t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

آماره آزمون با فرض نابرابری واریانس ها

- اگر فرض برابری واریانس دو گروه رد شود (استفاده از واریانس تخمینی)

- فاصله اطمینان مرتبط با آزمون دوطرفه

$$\overline{X_1} - \overline{X_2} \pm t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

آزمون برابری واریانس‌ها

- فرض‌های آزمون

$H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2$

$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

- آماره آزمون:

$$F = {S_1^2}\big/{S_2^2}$$

- ناحیه بحرانی:

$$ {S_1^2}\big/{S_2^2} > F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1) \_\_\_\_ or \_\_\_\_ {S_1^2}\big/{S_2^2} < F_{\alpha/2}(m-1, n-1)$$

آزمون میانگین دو متغیر (متغیرهای جفت شده)

- در این آزمون مشخصه‌های اندازه گیری شده به صورت زوج مرتب (x,y) در نظر گرفته می‌شوند که در آن x ویژگی اول و y ویژگی دوم در نمونه است.
- برای مثال می‌خواهیم اثر یک دارو را در کاهش فشار خون مشخص کنیم. به افراد نمونه در ابتدا دارونما داده فشار خون را اندازه‌گیری می‌کنیم. پس از خورداندن دارو واقعی نیز فشار خون اندازه‌گیری خواهد شد. آزمون می‌خواهد میانگین فشار خون را قبل و بعد از داروی واقعی مقایسه کند.

آزمون میانگین دو متغیر (متغیرهای جفت شده)

- فرض آزمون به صورت زیر خواهد بود.
  - $H_0: \mu_1=\mu_2$
  - $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$
- آزمون مشابه در نرم‌افزار spss:
  - $H_0: \mu_1-\mu_2=0$
  - $H_1: \mu_1-\mu_2 \neq 0$

آماره آزمون و فاصله اطمینان

- آماره آزمون

$$T = \bar{d} \Big/ \frac{S_d}{\sqrt{n}}$$

- صورت میانگین تفاضل زوج‌ها
- مخرج انحراف استاندارد تقاضلات زوج‌ها
- فاصله اطمینان به صورت:

$$\bar{d} \pm t_{1-\alpha}(n-1)\frac{S_d}{\sqrt{n}}$$

این اسلاید ها بر مبنای نکات مطرح شده در فرادرس
«آزمون‌های فرض مربوط به میانگین جامعه نرمال در SPSS»
تهیه شده است.

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این آموزش به لینک زیر مراجعه نمایید.

faradars.org/fvst94032